B **Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **04.12.2022.**

Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) KOLOKVIJUM 1

U zadacima dato je više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,…,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora. Na kraju testa su tri zadatka koji se rade u datoj svesci. Obavezno se predaje ovaj test i sveska.

- $\arg(-8i) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg(4) = 0$, $\arg(-5) = \pi$ $\arg(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(e^{-i\pi}) = \pi$, $\arg(-7\pi) = \pi$, $\arg(-2e^{i\frac{\pi}{2}}) = -\frac{\pi}{2}$

  $\arg(2\pi) = 0$, $\arg(4e^{3i}) = 3$, $\arg(2e^{5i}) = 5-2\pi$, $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-2+2i) = \frac{3\pi}{4}$, $\arg(-\sqrt{3}+i) = \frac{5\pi}{6}$, $\arg(0) =$ \

- U grupi $(G,\cdot)$, gde je e neutralni, a x^{-1} inverzni za x važi: 1) $a^{-1}\cdot a = e$ 2) $a\cdot e = e$ 3) $e\cdot e = e$

  4) $(a\cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$ 5) $(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$ 6) $a\cdot y = b \Rightarrow y = a^{-1}\cdot b$ 7) $a\cdot y = b \Rightarrow y = b\cdot a^{-1}$ 8) $e^{-1} = e$

- Ako je $P(x) = ax^3 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je:

  1) $dg(P) = 3$, 2) $dg(P) \in \{0,1,3\}$, 3) $dg(P) \in \{0,1,2,3\}$, 4) $dg(P) \in \{0,3,2\}$

- U svakoj Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$ za svako $a,b,c \in B$: 1) $ab = 1 \Rightarrow b = 0'$ 2) $bc + a = (a+b)(a+c)$

  3) $(a')' = a + 1'$ 4) $ab = 1 \Rightarrow a + b = 1$ 5) $aa' = 1$ 6) $a\cdot 0 = 1'$ 7) $ab = 1 \Leftrightarrow a = 1$ 8) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

- Injektivne funkcije: 1) $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin x$ 2) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
  3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x$ 4) $f : (-3,1) \to [0,9),\ f(x) = x^2$ 5) $f : (0,\frac{\pi}{2}) \to (0,\infty),\ f(x) = \operatorname{tg} x$

- Neka je $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ skup svih funkcija skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ u samog sebe i neka je operacija množenja funkcija $\cdot$ definisana sa $(\forall x \in \mathbb{R})\quad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ za sve f i g iz $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Tada je
  1) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\cdot)$ asocijativni grupoid. 2) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\cdot)$ grupoid sa neutralnim elementom.
  3) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\cdot)$ grupa. 4) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\cdot)$ komutativna grupa. 5) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\cdot)$ grupoid.

- Neka je $\mathcal{R}$ skup svih funkcija skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ u samog sebe koje nemaju korene (nule) u skupu $\mathbb{R}$, odnosno $\mathcal{R} = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \neq 0\}$ i neka je operacija množenja funkcija $\cdot$ definisana sa $(\forall x \in \mathbb{R})\quad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ za sve f i g iz $\mathcal{R}$. Tada je
  1) $(\mathcal{R},\cdot)$ asocijativni grupoid. 2) $(\mathcal{R},\cdot)$ grupoid sa neutralnim elementom.
  3) $(\mathcal{R},\cdot)$ grupa. 4) $(\mathcal{R},\cdot)$ komutativna grupa. 5) $(\mathcal{R},\cdot)$ grupoid.

- 1) $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) \leq 0$ 2) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ 3) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m(z) \in \mathbb{R}$

  4) $\arg z > 0 \Rightarrow I_m(z) > 0$ 5) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) > 0$ 6) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) \geq 0$

- Grupe su: 1) $([0,\infty),+)$ 2) $(\{e^{i\theta} | \theta \in (-\pi,\pi]\},\cdot)$ 3) $(\{-1,1\},\cdot)$ 4) $\{i,-1,-i,1\},\cdot)$ 5) $(\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\},\cdot)$

  6) $(\{-1,0,1\},\cdot)$ 7) $(\mathbb{C},\cdot)$ 8) $((0,\infty),\cdot)$ 9) $(\{0,1\},\cdot)$ 10) $\left(\left\{\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\right\},\circ\right)$ 11) 3,4 i 5 su podgrupe grupe 2.

- Neka je $A = \{1,2,3,4\}$ i $B = \{1,2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \underline{\nearrow}$ označava neopadajuću funkciju f:

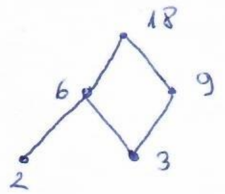
  $\left|\{f | f : A \longrightarrow B\}\right| = 2^4 = 16$, $\left|\{f | f : A \xrightarrow{1-1} B\}\right| = 0$, $\left|\{f | f : A \longrightarrow B \wedge f \nearrow\}\right| = 0$, $\left|\{f | f : B \xrightarrow{na} A\}\right| = 0$,

  $\left|\{f | f : B \to A\} \wedge f \nearrow\right| = \binom{4}{2} = 6$, $\left|\{f | f : A \xrightarrow[na]{1-1} A\}\right| = 4! = 24$, $\left|\{f | f : B \to A \wedge f \underline{\nearrow}\}\right| = \binom{5}{2} = 10$, $\left|\{f | f : A \xrightarrow{na} B\}\right| = 14$.

- Neka su $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ i $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definisane sa $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \ln(x+1)$. Izračunati:

  1) $f^{-1}(x) = x^2$ 2) $g^{-1}(x) = e^x - 1$ 3) $(f\circ g)(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ 4) $(f\circ g)^{-1}(x) = e^{x^2} - 1$ 5) $(g^{-1}\circ f^{-1})(x) = e^{x^2} - 1$

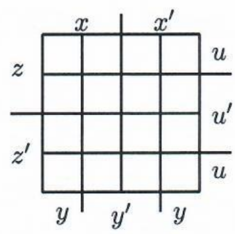
- $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(3+i)=0$. Tačno je : 1) $x-3+i \mid f(x)$ 2) $x-3-i \mid f(x)$ 3) $x-\sqrt{10}e^{-i\,\mathrm{arctg}\,3} \mid f(x)$ 4) $x-\sqrt{10}e^{i} \mid f(x)$ 5) $x^2-6x+10 \mid f(x)$; 6) $x+3+i \mid f(x)$ 7) $x^2+6x+10 \mid f(x)$; 8) $x-\sqrt{10}e^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}} \mid f(x)$ 9) $x-\sqrt{10}e^{-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}} \mid f(x)$
- U skupu $\mathbb{C}\setminus\{0\}$: 1) $|z_1z_2|=|z_2||z_1|$ 2) $z=e^{2i} \Rightarrow z^{-1}=\overline{z}$ 3) $I_m(z)=\frac{1}{2}(z-\overline{z})$ 4) $\overline{z_2-z_1}=\overline{z}_2-\overline{z}_1$ 5) $|z_1-z_2|\le|z_2|+|z_1|$ 6) $z_1z_2\neq 0 \Rightarrow \left(z_1|z_2|=z_2|z_1| \Leftrightarrow \arg z_1=\arg z_2\right)$ 7) $z\overline{z}=\overline{z\overline{z}}$ 8) $|z|=1 \Leftrightarrow z^{-7}=\overline{z}^7$
- Ako je $A=\{w|w\in\mathbb{C}\wedge w^2>0\}$, tada je: 1) $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 2) $A=\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-$ 3) $A=\{z|\arg z\in\{0,\pi\}\}$ 4) $A=\mathbb{R}^+$ 5) $A=\{\rho e^{i\varphi}|\rho>0\wedge\varphi\in(-\pi,\pi)\}$ 6) $A=\{\rho e^{i\varphi}|\rho>0\wedge\varphi\in(-\pi,\pi]\}$ 7) $A=\{\rho e^{i\varphi}|\rho>0\wedge\varphi\in\mathbb{R}\}$ 8) $A=\mathbb{R}$.
- Neka je $z=-1+2i$, $u=4+2i$ i $w=2+i$. Rotacijom tačke z oko tačke w za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $1-2i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $1+3i$, $\measuredangle zwu=$ $-3\pi/4$.
- Za $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ i $\varphi\in(-\pi,\pi]$: 1) $\overline{e^{i\varphi}}=e^{\overline{i\varphi}}$ 2) $z=|z|e^{i\arg z}$ 3) $|z|=1\Leftrightarrow z=e^{i\varphi}$ 4) $\overline{e^{-i\varphi}}=e^{i\varphi}$ 5) $z=e^{i\varphi}\Leftrightarrow|z|=1$ 6) $1=z\overline{z}|z|^{-2}$ 7) $\arg z>0\Leftrightarrow\arg z-\arg(-z)=\pi$ 8) $e^{i(\arg z-\arg z^{-1})}=z^2|z|^{-2}=z(\overline{z})^{-1}$ 9) $\arg z+\arg z^{-1}\in\{0,2\pi\}$
- Pri deljenju polinoma x^3+x+2 sa x^2+1 nad $\mathbb{R}$, količnik je x, a ostatak je 2.
- Za kompleksni broj $z=e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}=|z|e^{i\arg z}$, naći: $\left(\text{Može i korišćenjem } e^{i\alpha}\pm e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}\pm e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}).\right)$
  $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=\frac{7\pi}{12}$, $I_m(z)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $R_e(z)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\overline{z}=\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{7\pi}{12}}$, $z^2=2\cdot e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $R_e(z^2)=-\sqrt{3}$.
- Ispitati da li relacija „deli" skupa $A=\{2,3,6,9,18\}$ jeste relacija poretka: DA NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, i napisati
  minimalne el. $\{2,3\}$
  maksimalne el. $\{18\}$
  najveći el. $\{18\}$
  najmanji el. $\{\ \}$



B **ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1** **04.12.2022.**

1. Za $a,b\in\mathbb{R}$, neka je funkcija $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f_{a,b}(x)=e^{ax+b}$. Neka je $\mathcal{F}=\{f_{a,b}|a,b\in\mathbb{R}\}$ i $\mathcal{A}=\{f_{a,0}|a\in\mathbb{R}\}$. Za funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, neka su operacije $\oplus$ i $\odot$ definisane sa
   $(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $(f\odot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
   (a) Ispitati da li je $(\mathcal{A},\oplus)$ komutativna grupa.
   (b) Dokazati da je $(\mathcal{F},\odot)$ komutativna grupa.
2. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0



3. Odrediti $a,b\in\mathbb{R}$ tako da 1 i 2 budu koreni polinoma
   $p(x)=x^5-8x^4+26x^3+ax^2+bx-10$,
   a zatim za te a i b faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{B}}$ REŠENJA

1. (a) $(\mathcal{A}, \oplus)$ nije komutativna grupa jer nije ni grupoid. Npr. za $f_{1,0}, f_{2,0} \in \mathcal{A}$ imamo da je
$(f_{1,0} \oplus f_{2,0})(x) = f_{1,0}(x) + f_{2,0}(x) = e^x + e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R},$
te $f_{1,0} \oplus f_{2,0} \notin \mathcal{A}$ jer izraz $e^x + e^{2x}$ nije oblika $f_{c,0}(x) = e^{cx}$ za neko $c \in \mathbb{R}$. Naime, ako pretpostavimo suprotno, da je
$e^x + e^{2x} = e^{cx}, \quad x \in \mathbb{R}$
za neko $c \in \mathbb{R}$, tada npr. za $x = 0$ dobijamo $e^0 + e^{2\cdot 0} = e^{c\cdot 0}$ tj. $1 + 1 = 1$, to je kontradikcija.

   (b) Zapazimo da je za sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i svako $x \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}(f_{a,b} \odot f_{c,d})(x) &= f_{a,b}(x) \cdot f_{c,d}(x) = e^{ax+b} \cdot e^{cx+d} \\ &= e^{(ax+b)+(cx+d)} = e^{(a+c)x+(b+d)} = f_{a+c,b+d}(x),\end{aligned}$$
dakle $f_{a,b} \odot f_{c,d} = f_{a+c,b+d}$. [*]
Operacija $\odot$ je komutativna i asocijativna jer je
$$f_{a,b} \odot f_{c,d} = f_{a+c,b+d} = f_{c+a,d+b} = f_{c,d} \odot f_{a,b},$$
$$\begin{aligned}(f_{a,b} \odot f_{c,d}) \odot f_{e,f} &= f_{a+c,b+d} \odot f_{e,f} = f_{a+c+e,b+d+f} \\ &= f_{a,b} \odot f_{c+e,d+f} = f_{a,b} \odot (f_{c,d} \odot f_{e,f}).\end{aligned}$$
Neutralni element je $f_{0,0} \in \mathcal{F}$ jer zbog [*] vai
$$f_{0,0} \odot f_{a,b} = f_{0+a,0+b} = f_{a,b}, \quad f_{a,b} \odot f_{0,0} = f_{a+0,b+0} = f_{a,b}.$$
Za proizvoljno $f_{a,b} \in \mathcal{F}$, inverzni element je $f_{-a,-b} \in \mathcal{F}$ jer zbog [*] vai
$$f_{a,b} \odot f_{-a,-b} = f_{a+(-a),b+(-b)} = f_{0,0}, \quad f_{-a,-b} \odot f_{a,b} = f_{-a+a,-b+b} = f_{0,0}.$$
Dakle, $(\mathcal{F}, \odot)$ je komutativna grupa.

2. SDNF $= xy'zu' + xy'z'u' + x'y'zu + x'y'zu' + x'y'z'u' + x'y'z'u + x'yzu + x'yzu' + x'yz'u$.
Proste implikante: $x'z, \quad y'u', \quad x'u, \quad x'y'$.
MDNF $= x'z + y'u' + x'u$.

3.
$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -8 & 26 & a & b & -10 \\ \hline 1 & 1 & -7 & 19 & a+19 & a+b+19 & \underline{a+b+9} \\ 2 & 1 & -5 & 9 & a+37 & \underline{3a+b+93} & \end{array}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} a+b=-9 \\ 3a+b=-93 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=-9 \\ 2a=-84 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=-42 \\ b=33 \end{matrix},$$
$$\begin{aligned}p(x) &= x^5 - 8x^4 + 26x^3 + ax^2 + bx - 10 = x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 42x^2 + 33x - 10 \\ &= (x-1)(x-2)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5).\end{aligned}$$
Kandidati za racionalne korene polinoma $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ su ± 1 i ± 5, te Hornerovom emom dobijamo
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 9 & -5 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 5 & \underline{0} \end{array},$$
odakle je
$$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x^2 - 4x + 5),$$
a koreni polinoma $x^2 - 4x + 5$ su $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i \notin \mathbb{R}$.
Sledi da je
$$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x^2 - 4x + 5)$$
faktorizacija polinoma p nad $\mathbb{R}$, a faktorizacija polinoma p nad $\mathbb{C}$ glasi
$$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x-(2+i))(x-(2-i)).$$